Ejercicios resueltos

Boletín 3

Movimiento armónico simple

Ejercicio 2

Una partícula que vibra a lo largo de un segmento de 10 cm de longitud tiene en el instante inicial su máxima velocidad que es de 20 cm/s. Determina las constantes del movimiento (amplitud, fase inicial, pulsación, frecuencia y periodo) y escribe las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración. Calcula la elongación, velocidad y aceleración en el instante $t = 1{,}75\,\pi$ s. ¿Cuál es la diferencia de fase entre este instante y el instante inicial?

Solución 2

La amplitud es igual a la mitad del segmento recorrido: $A = 5 \cdot 10^{-2}$ m. Las expresiones generales de la elongación y de la velocidad son:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0); \quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

Como en el instante inicial la velocidad es máxima, se tiene que la fase inicial es:

$$cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) = 1 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \text{ rad}$$

Del valor de la máxima velocidad se deducen el resto de las constantes del movimiento.

$$v_{máxima} = A \cdot \omega = 0{,}20 \text{ m/s} \Rightarrow \omega = \frac{v_{máx}}{A} = \frac{0{,}20}{0{,}05} = 4 \text{ rad/s}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \text{ Hz}; \quad T = \frac{1}{\nu} = \frac{\pi}{2} \text{ s}$$

Las expresiones de la elongación, velocidad y aceleración y sus valores en el instante indicado, $t = 1{,}75 \cdot \pi$ s, son:

$$x = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) = 0{,}05 \cdot \sin(4 \cdot t) \Rightarrow x_t = 0{,}05 \cdot \sin(4 \cdot 1{,}75 \cdot \pi) = 0 \text{ m}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0{,}2 \cdot \cos(4 \cdot t) \Rightarrow v_t = 0{,}2 \cdot \cos(4 \cdot 1{,}75 \cdot \pi) = -0{,}2 \text{ m/s}$$

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -0{,}8 \cdot \sin(4 \cdot t) \Rightarrow a_t = -0{,}8 \cdot \sin(4 \cdot 1{,}75 \cdot \pi) = 0 \text{ m/s}^2$$

La diferencia de fase entre el instante inicial y el $t = 1{,}75 \cdot \pi$ s es:

$$\Delta\varphi = \varphi_t - \varphi_0 = \omega \cdot 1{,}75 \cdot \pi - 0 = 4 \cdot 1{,}75 \cdot \pi = 7 \cdot \pi \text{ rad} = (3 \cdot 2 \cdot \pi + \pi) \text{ rad}$$

por lo que los dos instantes están en oposición de fase.

Ejercicio 3

Deduce la expresión que relaciona la velocidad y la elongación de una partícula animada con un movimiento armónico simple.

Solución 3

Las expresiones generales de la elongación y de la velocidad son:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Multiplicando la primera expresión por ω y elevando al cuadrado ambas expresiones se tiene:

$$x^2\omega^2 = A^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$
$$v^2 = A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Sumando y operando:

$$x^2\omega^2 + v^2 = A^2\omega^2$$
$$v^2 = \omega^2(A^2 - x^2) \Rightarrow v = \pm\,\omega\sqrt{(A^2 - x^2)}$$

El signo doble se debe a que la trayectoria se puede recorrer en ambos sentidos en una misma posición.

Ejercicio 4

Un resorte se alarga 4 cm cuando se cuelga de él un objeto de 20 kg de masa. A continuación, se estira el resorte 3 cm más y se le deja que oscile libremente. Determina el periodo y la pulsación del movimiento. Calcula los valores de la elongación, velocidad, aceleración y dureza elástica a los 2,1 s de iniciado el movimiento. ¿Cuál es la diferencia de fase entre este instante y el instante inicial?

Solución 4

Aplicando la ley de Hooke:

$$k = \frac{F}{y} = \frac{m\,g}{y} = \frac{20\cdot 9{,}8}{0{,}04} = 4900\ \text{N/m}$$

El periodo del movimiento y la pulsación son:

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\,\pi\sqrt{\frac{20}{4900}} = 0{,}4\ \text{s} \Rightarrow \omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{0{,}4} = 5\,\pi\ \text{rad/s}$$

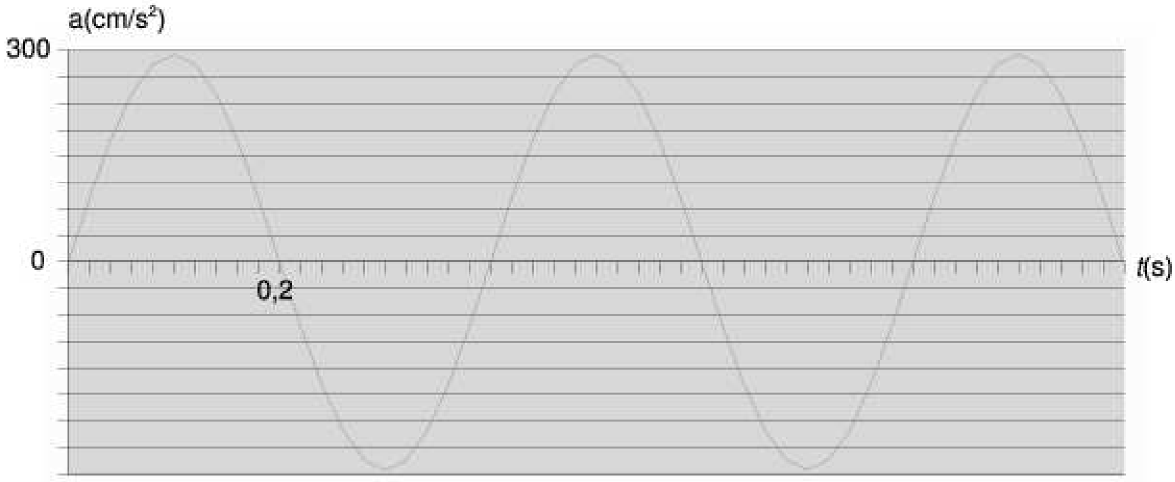
El movimiento comienza en el punto más bajo de la vibración, por ello si para su descripción se utiliza la función $\sin\varphi$, entonces la fase inicial es $\varphi_0 = 3\,\pi/2$ rad.

Las expresiones de la elongación, velocidad, aceleración y fuerza elástica y sus valores a los 2,1 s de iniciado el movimiento son:

$$y = 0{,}03\ \sin(5\,\pi\,t + 3\,\pi/2)\ \Rightarrow y_{2,1} = 0{,}03\ \sin(5\,\pi\cdot 2{,}1 + 3\,\pi/2) = 0\ \text{m}$$

Ejercicio 5

La figura adjunta representa la gráfica de la aceleración frente al tiempo para un movimiento vibratorio armónico simple. Deduce la expresión general de la posición.



Solución 5

Al utilizar como expresión de la posición:

$$x = A\, \sin(\omega\, t + \varphi_0)$$

La ecuación de la aceleración es:

$$a = \frac{d\,v}{d\,t} = -A\,\omega^2\, \sin(\omega\, t + \varphi_0)$$

De la gráfica se deduce que $T/2 = 0{,}2$ s, por lo que el periodo y la pulsación son:

$$T = 0{,}4 \text{ s}\,; \quad \omega = 2\,\pi\,/T = 5\,\pi \text{ rad/s}$$

Del valor de la aceleración máxima: $a_{máxima} = 300$ cm/s^2, se deduce que el valor de la amplitud es:

$$a_{máx} = A\,\omega^2 = 300 \Rightarrow A = 1{,}216 \text{ cm}$$

En el instante inicial la partícula está en el centro de la vibración dirigiéndose hacia valores positivos de la aceleración, es decir, se dirige hacia posiciones negativas, por lo que la fase inicial es: $\varphi_0 = \pi$ rad

La ecuación de la posición es:

$$x = A\, \sin(\omega\, t + \varphi_0) = 1{,}216\, \sin(5\,\pi\, t + \pi) \text{ cm}$$

Ejercicio 6

Una partícula describe un movimiento armónico simple con una frecuencia de 10 Hz y 5 cm de amplitud. Determina la velocidad cuando la elongación es $x = 2{,}5$ cm.

Solución 6

La pulsación de la vibración es: $\omega = 2\,\pi\,\nu = 20\,\pi$ rad/s y la amplitud es: $A = 5\cdot 10^{-2}$ m.
En ausencia de rozamiento la energía mecánica del oscilador se conserva:

$$E = E_c + E_p\,; \quad \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

Operando y como $k = m\,\omega^2$, se tiene:

$$m\,\omega^2\,A^2 = m\,v^2 + m\,\omega^2\,x^2\,; \quad \omega^2\,A^2 = v^2 + \omega^2\,x^2 \Rightarrow v = \pm\,\omega\,\sqrt{A^2 - x^2}$$

Sustituyendo, se tiene que la velocidad en la posición $x = 2{,}5$ cm $= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ m es:

$$v_{2,5} = \pm\,20\,\pi\,\sqrt{(5\cdot 10^{-2})^2 - (2{,}5\cdot 10^{-2})^2} = \pm\,2{,}72 \text{ m/s}$$

Cuando la partícula se aleja del origen su velocidad es positiva y cuando se dirige al origen su velocidad tiene el signo negativo.

Ejercicio 7

Un pedazo de plastilina, de 40 g de masa, se mueve con velocidad de 100 m/s y choca, quedando incrustada, en un bloque de madera de 1 kg de masa que está en reposo. El bloque está unido a un muelle que se contrae 20 cm. Si no hay rozamiento entre el suelo y el bloque, determina la velocidad inicial del conjunto, la constante elástica del muelle y el periodo de oscilación del movimiento vibratorio generado.

Solución 7

Durante el choque se conserva la cantidad del movimiento del conjunto. Después del choque, el conjunto formado por la plastilina y el bloque de madera contrae el muelle, la fuerza elástica detiene al conjunto y la energía cinética se almacena en forma de energía potencial elástica en el resorte.

Una vez que el bloque se detiene, la fuerza elástica obliga al bloque a describir un movimiento vibratorio armónico simple de 20 cm de amplitud, durante el cual la energía mecánica del conjunto permanece constante.

Se elige un sistema de referencia con el eje X la horizontal y origen en el punto en el que se produce el impacto. Aplicando la ley de la conservación de la cantidad de movimiento en el instante del choque y como el bloque está inicialmente en reposo, se tiene:

$$m_p\,\vec{v}_p = (m_p + m_b)\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{m_p\,\vec{v}_p}{m_p + m_b} = \frac{40\cdot 10^{-3}\cdot 100\,\vec{\imath}}{40\cdot 10^{-3} + 1} = 3{,}85\,\vec{\imath}\text{ m/s}$$

La energía cinética de la plastilina y del bloque de madera se emplea en contraer el resorte:

$$\frac{1}{2}\,(m_p + m_b)\,v^2 = \frac{1}{2}\,k\,x^2 \Rightarrow k = \frac{(m_p + m_b)\,v^2}{x^2} = \frac{1{,}04\cdot 3{,}85^2}{0{,}2^2} = 385{,}4 \text{ N/m}$$

El periodo del movimiento es:

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{1{,}04}{385{,}4}} = 0{,}33 \text{ s}$$

Ejercicio 8

Un péndulo está calibrado para realizar una oscilación completa en 1 s en un lugar en el que la aceleración de la gravedad es $g = 9{,}8$ m/s^2. ¿Cuánto retrasará o adelantará al cabo de un día cuando se traslade a un lugar en el que la aceleración de la gravedad es $g = 9{,}7$ m/s^2?

Solución 8

Sea A el punto en el que el péndulo realiza una oscilación completa en 1 s. Al trasladarlo al punto B, en el que la aceleración de la gravedad disminuye, entonces el periodo del péndulo se hace mayor, por lo que se retrasa en la medida del tiempo.

Los distintos periodos del péndulo en los lugares A y B son:

$$T_A = 2\,\pi\,\sqrt{lg_A}\,; \quad T_B = 2\,\pi\,\sqrt{lg_B}\ \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{\frac{g_B}{g_A}} = \sqrt{\frac{9{,}7}{9{,}8}} = 0{,}9949$$

Por lo que:

$$T_B = \frac{T_A}{0{,}9949} = \frac{1}{0{,}9949} = 1{,}0051 \text{ s}$$

El péndulo colocado en el lugar B indica que ha transcurrido 1 s cuando en realidad han transcurrido 1,0051 s, por lo que se retrasa 0,0051 s en cada segundo.

El retraso al cabo de un día es: $retraso = 0{,}0051 \cdot 24 \cdot 3600 = 7$ min21 s

Ejercicio 9

Un objeto de 1,4 kg de masa se une a un muelle de constante elástica 15 N/m. Calcula la velocidad máxima del objeto cuando el sistema vibra con una amplitud de 2,0 cm. ¿Cuál es el valor de las energías cinética y potencial elástica cuando el objeto se encuentra a 1 cm de la posición central de vibración?

Solución 9

Aplicando la ley de conservación de la energía mecánica, la energía potencial elástica en un extremo de la vibración es igual a la energía cinética del objeto en el centro del recorrido.

$$\frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2_{máxima}\ \Rightarrow v_{máx} = A\,\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}02\,\sqrt{\frac{15}{1{,}4}} = 6{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

Aplicando la ecuación de la energía potencial y la ley de conservación de la energía mecánica, se tiene:

$$E_p = \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (0{,}01)^2 = 7{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

$$E_c = E_T - E_p = \frac{1}{2}\,k\,A^2 - \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot [(0{,}02)^2 - (0{,}01)^2] = 22{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

Ejercicio 10

¿En qué posiciones de la partícula que describe un movimiento vibratorio armónico simple se igualan las energías cinética y potencial?

Solución 10

La energía total del movimiento es: $E = \dfrac{1}{2}\,k\,A^2$. Si los valores de las energías son iguales, entonces la energía potencial es la mitad de la total:

$$E_p = \frac{E}{2}\,;\ \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{\frac{1}{2}\,k\,A^2}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{2}$$

Despejando, la elongación para la que se igualan los dos tipos de energía es:

$$x = \pm\,\frac{A}{\sqrt{2}} = \pm\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,A$$

Ejercicio 11

Una partícula de 10^{-3} kg de masa recorre un segmento de 5 cm de longitud en 1 s, con movimiento vibratorio armónico simple. La partícula en el instante inicial está situada en la posición central del recorrido y se dirige hacia elongaciones positivas.

a) Calcula su energía cinética en el instante 2,75 s.

b) ¿Cuál es el primer instante en que coinciden los valores de la energía cinética y de la energía potencial?

c) Representa gráficamente la velocidad de la partícula frente al tiempo transcurrido.

Solución 11

a) La amplitud del movimiento es igual a la mitad de la distancia entre los extremos.

$$A = \frac{5}{2} = 2{,}5\ \text{cm}\ = 0{,}025\ \text{m}$$

Como la partícula tarda en recorrer el segmento 1 s, para poder volver a la posición inicial tarda el doble. Por tanto, el periodo y la pulsación del movimiento son:

$$T = 2\cdot 1 = 2\ \text{s}\ \Rightarrow \omega = \frac{2\,\pi}{T} = \frac{2\,\pi}{2} = \pi\ \text{rad/s}$$

La partícula está en el instante inicial en el centro de la oscilación y se dirige hacia elongaciones positivas, por lo que la fase inicial es $\varphi_0 = 0$ rad, cuando se utiliza para la descripción de la posición la función seno.

Las expresiones de la elongación y de la velocidad son:

$$y = A\,\sin(\omega\,t + \varphi_0) = 0{,}025\cdot\sin(\pi\,t)\ \Rightarrow v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}025\cdot\pi\cdot\cos(\pi\,t)\ \text{m/s}$$

La expresión de la energía cinética es:

$$E_c = \frac{1}{2}\,m\,v^2 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}\cdot[0{,}025\cdot\pi\cdot\cos(\pi\,t)]^2 = 3{,}08\cdot 10^{-6}\cdot\cos^2(\pi\,t)\ \text{J}$$

Y en el instante pedido:

$$E_c = 3{,}08 \cdot 10^{-6} \cdot \cos^2(\pi \cdot 2{,}75) = 1{,}54 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

b) Las expresiones generales de las energías potencial y cinética son:

$$y = A \sin(\omega\, t) \;\Rightarrow E_p = \frac{1}{2}\, k\, y^2 = \frac{1}{2}\, k\, A^2 \sin^2(\omega\, t)$$

$$v = A\, \omega \cos(\omega\, t) \;\Rightarrow E_c = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, A^2\, \omega^2\, cos^2(\omega\, t)$$

Igualando ambas expresiones:

$$\frac{1}{2}\, k\, A^2 \sin^2(\omega\, t) = \frac{1}{2}\, m\, A^2\, \omega^2 \cos^2(\omega\, t)$$

Simplificando y como $k = m\, \omega^2$, se tiene:

$$\sin^2(\omega\, t) = \cos^2(\omega\, t)$$

Por tanto:

$$\sin(\omega\, t) = \cos(\omega\, t) \;\Rightarrow \omega\, t = \frac{\pi}{4}$$

Despejando se tiene el instante pedido:

$$t = \frac{\pi/4}{\omega} = \frac{\pi}{4 \cdot \pi} = 0{,}25 \text{ s}$$

c) Hay que representar gráficamente la función $v = 0{,}025 \cdot \pi \cdot \cos(\pi\, t)$ m/s. Esta función está comprendida entre los valores máximos $v_{máx} = \pm\, 0{,}025 \cdot \pi$ m/s.

Inicialmente la partícula tiene el valor máximo de la velocidad y los sucesivos valores de esta se repiten con un periodo de 2 s.